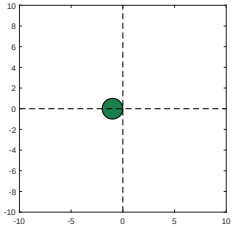
SSP Runge-Kutta módszerek

Sike András, Gyenizse-Nagy András Barnabás

Közönséges differenciálegyenletek numerikus módszerei előadás

Eötvös Loránd Tudományegyetem

2025. December 09.



Alapvető problémakör

Tekintsünk egy (hiperbolikus megmaradási törvényt leíró) parciális differenciálegyenletet (egy térdimenzióban):

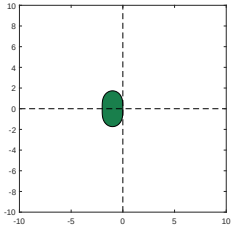
$$\left\{ \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial (f \circ u)}{\partial x} = 0 \right\}, \qquad f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ ismert, } u : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ ismeretlen.}$$

Ennek numerikus megoldásakor (például) először térbeli diszkretizációt alkalmazhatunk, amivel egy

$$\frac{\partial u}{\partial t} = F(u), \qquad F(u) = -\frac{\partial (f \circ u)}{\partial x} + \mathcal{O}((\Delta x)^k)$$

közönséges differenciálegyenletrendszer megoldására vezethetjük vissza a feladatot, amit megoldhatunk például explicit Euler-módszerrel:

$$y_{n+1} = y_n + \Delta t F(y_n), \qquad u_0 = y_0 \text{ adott.} \tag{1}$$

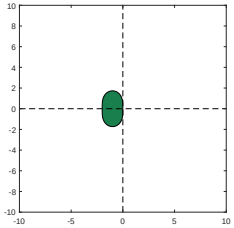


Probléma felvetése

Tekintsünk egy nemlineáris Burgers-egyenletet, azaz

$$\left\{ \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \frac{u^2}{2}}{\partial x} = 0 \right\}, \qquad u(x,0) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \leq 0; \\ -0.5, & \text{ha } x > 0. \end{cases}$$

Ugyanarra a szemidiszkretizált feladatra fogunk alkalmazni két különböző módszert. (A térbeli diszkretizációval most nem foglalkozunk.)



A két módszer

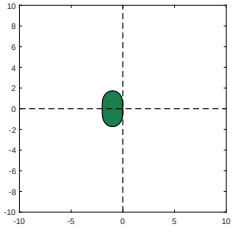
Az időbeli diszkretizációt először az SSPRK(2,2):

$$\begin{aligned} k_1 &= y_n + \Delta t F(y_n) \\ y_{n+1} &= \frac{1}{2} y_n + \frac{1}{2} k_1 + \frac{1}{2} \Delta t F(k_1), \end{aligned}$$

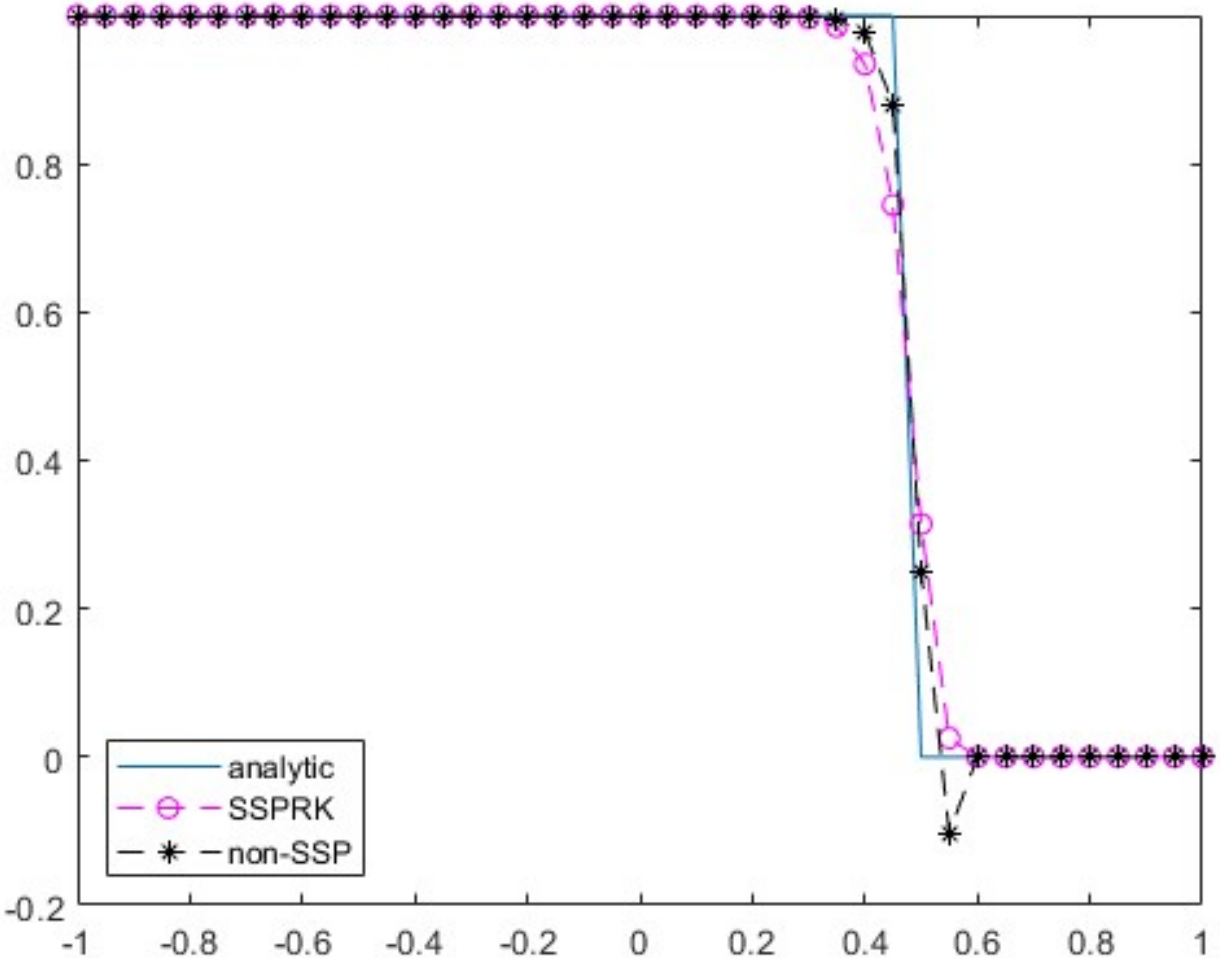
majd a szintén (idő szerint) másodrendű

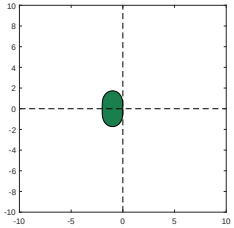
$$\begin{aligned} k_1 &= y_n - 20 \Delta t F(y_n) \\ y_{n+1} &= y_n + \frac{41}{40} k_1 - \frac{1}{40} \Delta t F(k_1) \end{aligned}$$

módszerrel végezzük el. Ugyanakkora lépésköz választása mellett megfigyelhető, hogy az első módszer minőségibb numerikus megoldást eredményez.



A két megoldás összehasonlítása





Motiváció

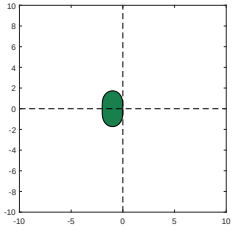
Mint láthattuk, nem mindegy, hogy milyen időbeli diszkretizációs módszert alkalmazunk.
Tegyük fel, hogy a korábbi

$$y_{n+1} = y_n + \Delta t F(y_n), \qquad u_0 = y_0 \text{ adott.}$$

diszkretizációra teljesül, hogy (valamilyen *fél*normában) erősen stabil, azaz

$$\|y_{n+1}\| \leq \|y_n\| \qquad \forall\ n \in \mathbb{N}.$$

Gond: Az Euler módszer elsőrendet eredményez. Ezért olyan magasabb rendű módszereket keresünk, amik ezt a tulajdonságot megtartják.
Kérdés: Hogyan keressünk magasabb rendű diszkretizációs módszert?



SSP módszerek

Definíció. Adott egy szemidiszkretizációs formula $\frac{\partial u}{\partial t} = F(u)$, és egy $\|\cdot\|$ norma. Feltesszük, hogy létezik egy Δt_{FE} érték, hogy:

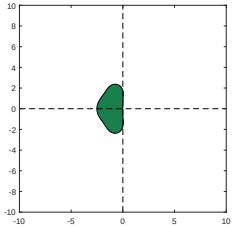
$$\|u + \Delta t F(u)\| \leq \|u\|, \quad 0 \leq \Delta t \leq \Delta t_{FE}, \ \forall u$$

Ekkor egy módszert erős stabilitás megőrzőnek (Strong Stability Preserving - SSP) nevezünk a $\mathcal{C}$ együtthatóval, ha teljesül a következő:

$$\|y_{n+1}\| \leq \|y_n\|,$$

amennyiben

$$\Delta t \leq \mathcal{C} \Delta t_{FE}.$$



A Shu-Osher formula

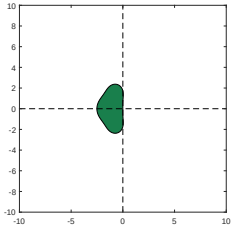
Egy általános Runge-Kutta módszer a szokott Butcher-tableau-alakban:

$$\begin{cases} k_i = y_n + \Delta t \sum_{j=1}^{m} a_{i,j} F(k_j) \qquad i \in \{1, 2, \ldots, m\}, \\ y_{n+1} = y_n + \Delta t \sum_{j=1}^{m} b_j F(k_j). \end{cases}$$

Másképpen, az ún. Shu-Osher-alakban (explicit módszer esetén):

$$\begin{cases} k_0 = y_n, \\ k_i = \sum_{j=0}^{i-1} \left(\alpha_{i,j} k_j + \Delta t \beta_{i,j} F(k_j)\right) \quad i \in \{1, 2, \ldots, m\}, \\ y_{n+1} = k_m. \end{cases}$$

Ahol a módszer akkor konzisztens, ha $\sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{i,j} = 1$ minden i index esetén.



Nemnegativitásból következik az erős stabilitás

Tétel. Ha a

$$\frac{\partial u}{\partial t} = F(u)$$

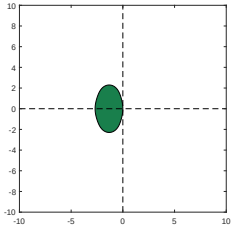
feladat olyan, hogy az explicit Euler módszer megőrzi az erős stabilitást minden $0 \leq \Delta t \leq \Delta t_{FE}$ lépésköz mellett, és $\alpha_{i,j}, \beta_{i,j} \geq 0$ minden i, j esetén. Ekkor az $\alpha_{i,j}, \beta_{i,j}$ együtthatókkal *(Shu-Osher-alakban)* felírt Runge-Kutta módszer is erősen stabil, azaz

$$\|y_{n+1}\| \leq \|y_n\| \qquad \forall n \in \mathbb{N},$$

mégpedig

$$0 \leq \Delta t \leq \left(\min_{i,j} \frac{\alpha_{i,j}}{\beta_{i,j}} \right) \cdot \Delta t_{FE} =: \mathcal{C}(\alpha, \beta) \cdot \Delta t_{FE}$$

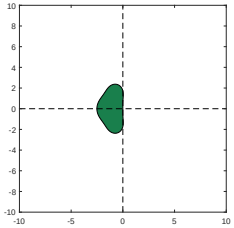
lépesköz választása esetén.



Bizonyítás, konvex kombinációk

A Shu-Osher-alakból a módszer explicit Euler módszerek konvex kombinációjaként is fel lehet írni: a norma konvexitását, az együtthatók pozitivitását és $\sum_{j=0}^{i-1} \alpha_{i,j} = 1$-et kihasználva

$$\begin{aligned}
\|k_i\| &= \left\| \sum_{j=0}^{i-1} \left(\alpha_{i,j} k_j + \Delta t \beta_{i,j} F\left(k_j\right) \right) \right\| = \\
&= \left\| \sum_{j=0}^{i-1} \alpha_{i,j} \left(k_j + \Delta t \frac{\beta_{i,j}}{\alpha_{i,j}} F\left(k_j\right) \right) \right\| \leq \\
&\leq \sum_{j=0}^{i-1} \alpha_{i,j} \left\| k_j + \Delta t \frac{\beta_{i,j}}{\alpha_{i,j}} F\left(k_j\right) \right\| .
\end{aligned}$$



Bizonyítás, lépésközválasztás

Feltettük, hogy az explicit Euler módszer SSP Δt_{FE}-nél kisebb lépésköz mellett, azaz

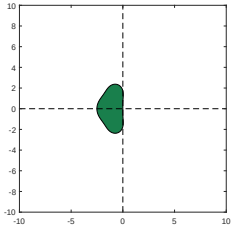
$$\|k_j\| \geq \left\| k_j + \Delta t\, F(k_j) \right\|, \qquad \text{ha } \frac{\beta_{i,j}}{\alpha_{i,j}} \Delta t \leq \Delta t_{FE}.$$

Ismét használva a konzisztenciáról szóló feltevést,

$$\|k_i\| \leq \|y_n\|, \qquad \forall\ i\,\{1, 2, \ldots, m\}, \text{ és ha } \frac{\beta_{i,j}}{\alpha_{i,j}} \Delta t \leq \Delta t_{FE}.$$

Mivel $y_{n+1} := k_m$ és a jobb oldali egyenlőségből kifejezhető, hogy milyen lépesközt kell válasszunk, a tételt bebizonyítottuk.

■



$\mathcal{C}(\alpha, \beta)$ nem egyértelmű

Vizsgáljuk a Heun-módszert:

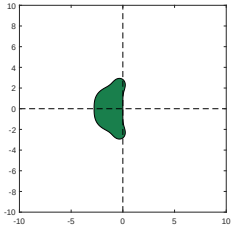
$$\begin{cases} k_0 = y_n, \\ k_1 = k_0 + \Delta t F\left(k_0\right), \\ y_{n+1} = k_0 + \frac{1}{2}\Delta t F\left(k_0\right) + \frac{1}{2}\Delta t F\left(k_1\right). \end{cases}$$

Az együtthatókat vizsgálva könnyen kiszámítható, hogy $\mathcal{C}(\alpha, \beta) = 0$. Az utolsó egyenletet átírhatjuk azonban:

$$y_{n+1} = \frac{3}{4}k_0 + \frac{1}{4}\Delta t F\left(k_0\right) + \frac{1}{4}k_1 + \frac{1}{2}\Delta t F\left(k_1\right).$$

Ebben az esetben $\mathcal{C}(\alpha, \beta) = \frac{1}{2}$, sőt, még egy átírással $\mathcal{C}(\alpha, \beta) = 1$ érték is elérhető:

$$y_{n+1} = k_2 = \frac{1}{2}k_0 + \frac{1}{2}k_1 + \frac{1}{2}\Delta t F\left(k_1\right).$$



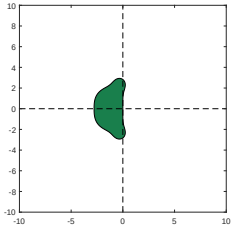
Optimalitás

Tétel. Minden kétlépcsős, explicit Runge-Kutta módszer esetén $\mathcal{C}(\alpha, \beta) \leq 1$, ha β nemnegatív.

Az előbb levezetett módszer tehát optimális, és az egyszerűség kedvéért k_0-t csak y_n-el jelöljük:

$$\begin{cases} k_1 = y_n + \Delta t F(y_n), \\ y_{n+1} = \frac{1}{2} y_n + \frac{1}{2} k_1 + \frac{1}{2} \Delta t F(k_1). \end{cases}$$

Vegyük észre, hogy ez a korábban már említett $SSPRK(2,2)$ módszer.



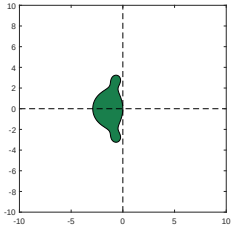
Bizonyítás, együtthatók rögzítése

Egy általános kétlépcsős módszer Shu-Osher-alakja:

$$\begin{cases} k_1 = \alpha_{1,0} y_n + \Delta t \beta_{1,0} F(y_n), \\ y_{n+1} = \alpha_{2,0} y_n + \alpha_{2,1} k_1 + \beta_{2,0} \Delta t F(y_n) + \beta_{2,1} \Delta t F(k_1). \end{cases}$$

Ha $\alpha_{2,1}$ és $\beta_{1,0}$-t rögzítjük, akkor a rendfeltételek miatt a módszer egyértelmű:

$$\begin{cases} \alpha_{1,0} = 1, \\ \alpha_{2,0} = 1 - \alpha_{2,1}, \\ \beta_{2,0} = 1 - \dfrac{1}{2\beta_{1,0}} - \alpha_{2,1}\beta_{1,0}, \\ \beta_{2,1} = \dfrac{1}{2\beta_{1,0}}. \end{cases}$$



Bizonyítás, SSP együttható

Tegyük fel, hogy olyan $\alpha_{2,1}$ ill. $\beta_{1,0}$ számokat adtunk meg, hogy $\mathcal{C}(\alpha, \beta) > 1$. Ekkor egyrészt

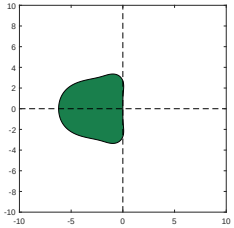
$$\alpha_{1,0} = 1 \quad \Rightarrow \quad \beta_{1,0} < 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2\beta_{1,0}} > \frac{1}{2},$$

másrészt

$$\alpha_{2,1} > \beta_{2,1} = \frac{1}{2\beta_{1,0}} \Rightarrow \alpha_{2,1}\beta_{1,0} > \frac{1}{2},$$

és így kapunk egy negatív együtthatót:

$$\beta_{2,0} = 1 - \frac{1}{2\beta_{1,0}} - \alpha_{2,1}\beta_{1,0} < 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0. \quad \blacksquare$$

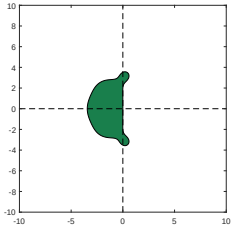


SSPRK(3, 3)

Tétel. Ha $\beta \geq 0$, akkor a háromlépcsős, harmadrendű explicit Runge-Kutta módszerekkel elérhető legnagyobb SSP együttható $\mathcal{C}(\alpha, \beta) = 1$, és erre példa az SSPRK(3, 3) módszer:

$$\begin{cases} k_1 = y_n + \Delta t F\left(y_n\right), \\ k_2 = \frac{3}{4} y_n + \frac{1}{4} k_1 + \frac{1}{4} \Delta t F\left(k_1\right), \\ y_{n+1} = \frac{1}{3} y_n + \frac{2}{3} k_2 + \frac{2}{3} \Delta t F\left(k_2\right). \end{cases}$$

Bizonyítás. Sok esetszétválasztás.



Effektív/hatékony SSP-együttható

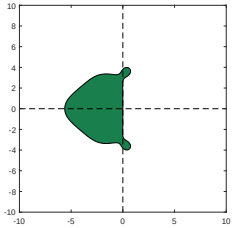
Az SSPRK(2,2) és SSPRK(3,3) módszerek SSP együtthatója 1 $\rightarrow$ ugyanakkora lépésközt használhattunk, mint az explicit Euler módszernél, azonban nagyobb a számítási költség

Új fogalom: Effektív SSP-együttható: $\mathcal{C}_{\text{eff}} = \frac{\mathcal{C}}{m}$, ahol m a függvénykiértékelések száma egy lépésben.

$$\text{SSPRK(2,2): } \mathcal{C}_{\text{eff}} = \frac{1}{2}, \quad \text{SSPRK(3,3): } \mathcal{C}_{\text{eff}} = \frac{1}{3}$$

Miért jó? Azonos rendű, de különböző lépcsőszámmal és $\mathcal{C}$ együtthatóval rendelkező módszerek összehasonlítására.

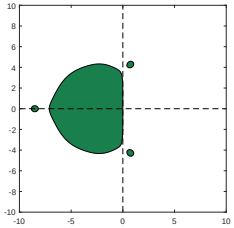
Ezen tudunk növelni, ha több lépcsőt veszünk be, és nagyobb SSP együtthatóval rendelkező módszereket keresünk.



Effektív/hatékony SSP együttható

Például az SSPRK(5,3) módszerrel $\mathcal{C}_{\text{eff}} \approx 0.53$ is elérhető:

$$\alpha \approx \begin{bmatrix} 1.00 & & & & \\ & 1.00 & & & \\ 0.57 & & 0.43 & & \\ 0.09 & 0.00 & & 0.91 & \\ 0.01 & 0.20 & 0.00 & & 0.79 \end{bmatrix}, \quad \beta \approx \begin{bmatrix} 0.38 & & & & \\ & 0.38 & & & \\ & & 0.16 & & \\ 0.00 & & & 0.34 & \\ 0.00 & 0.00 & & & 0.30 \end{bmatrix}$$



Heun-módszer további vizsgálata

Tekintsük ismét a Heun-módszert:

$$\begin{cases} k_1 = y_n + \Delta t F\left(y_n\right), \\ y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}\Delta t F\left(y_n\right) + \frac{1}{2}\Delta t F\left(k_1\right). \end{cases}$$

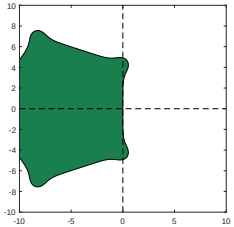
Láttuk, hogy felírástól függően az SSP együttható felvehet $0, \frac{1}{2}$ vagy 1 értéket is. Sőt, tetszőleges $0 \leq \widehat{\alpha} \leq \frac{1}{2}$ esetén az első egyenletet $\widehat{\alpha}$-val szorozva majd a másodikhoz

$$0 = \widehat{\alpha} k_1 - \widehat{\alpha}(y_n + \Delta t F(y_n))$$

-t hozzáadva

$$y_{n+1} = (1-\widehat{\alpha})\left(y_n + \frac{1-2\widehat{\alpha}}{2-2\widehat{\alpha}}\Delta t F\left(y_n\right)\right) + \widehat{\alpha}\left(k_1 + \frac{1}{2\widehat{\alpha}}\Delta t F\left(k_1\right)\right)$$

egyenletet kapjuk, amiből $\mathcal{C}(\alpha, \beta) = 2\widehat{\alpha}$. Sőt, előfordulhat, hogy egy Shu-Osher-alak kevesebb lépcsővel is felírható.



A módosított Shu-Osher-alak

Az eddig használt alak csak explicit módszerek leírására volt alkalmas. Ezért általánosabban az

$$\begin{cases} k_i = v_i y_n + \sum_{j=1}^{m} \left(\alpha_{i,j} k_j + \Delta t \beta_{i,j} F\left(k_j\right) \right) & i \in \{1, 2, \ldots, m+1\}, \\ y_{n+1} = k_{m+1} \end{cases}$$

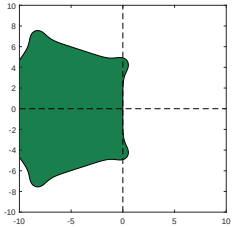
alakot vizsgáljuk. Ennek első sora átrendezhető

$$k_i = v_i y_n + \sum_{j=1}^{m} \alpha_{i,j} \left(k_j + \Delta t \frac{\beta_{i,j}}{\alpha_{i,j}} F\left(k_j\right) \right) \qquad i \in \{1, 2, \ldots, m+1\}.$$

A konzisztenciához szükséges, hogy

$$v_i + \sum_{j=1}^{m} \alpha_{i,j} = 1 \qquad i \in \{1, 2, \ldots, m+1\},$$

így nemnegatív $v_i, \alpha_{i,j}, \beta_{i,j}$ együtthatók esetén implicit esetben is minden lépcső explicit Euler lépések konvex kombinációja.



0-jóldefiniáltság

Bizonyos módszerek érdektelenek:

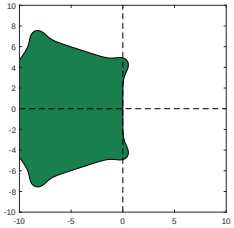
$$\begin{cases} k_1 = k_2 + F(k_1), \\ k_2 = k_1 + F(k_2), \\ y_{n+1} = k_2. \end{cases}$$

Ha $F(u) = 0$, akkor mindkét lépcsőre $k_1 = k_2$ adódik, és így y_{n+1} tetszőleges lehet.

Definíció. Egy Runge-Kutta módszer 0-*jóldefiniált*, ha minden lépcsője egyértelműen meghatározható a

$$u'(t) = 0 \qquad u(t_0) = t_0$$

Cauchy-feladat esetén.



Nemnegativitásból következik az erős stabilitás, II.

Tétel. Ha a

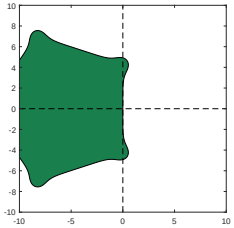
$$\frac{\partial u}{\partial t} = F(u)$$

feladat olyan, hogy az explicit Euler módszer megőrzi az erős stabilitást minden $0 \leq \Delta t \leq \Delta t_{FE}$ lépésköz mellett, és $v_i, \alpha_{i,j}, \beta_{i,j} \geq 0$ minden i, j esetén. Ekkor a $v_i, \alpha_{i,j}, \beta_{i,j}$ együtthatókkal *(Shu-Osher-alakban)* felírt Runge-Kutta módszer is erősen stabil, mégpedig

$$0 \leq \Delta t \leq \left(\min_{i,j} \frac{\alpha_{i,j}}{\beta_{i,j}} \right) \cdot \Delta t_{FE} =: \mathcal{C}(\alpha, \beta) \cdot \Delta t_{FE}$$

lépesköz választása esetén.

Bizonyítás. Hasonló az explicit esethez.



Vektorizálás

Az α és β mátrixok formálisan

$$\alpha = \begin{cases} \alpha_{i,j}, & \text{ha } 1 \le i \le m+1,\ 1 \le j \le m \\ 0, & \text{ha } j = m+1 \end{cases}, \quad \beta = \begin{cases} \beta_{i,j}, & \text{ha } 1 \le i \le m+1,\ 1 \le j \le m \\ 0, & \text{ha } j = m+1 \end{cases},$$

és továbbá a numerikus megoldáshoz, illetve a jobboldali függvény diszkretizációjához tartozó vektorokat

$$\mathbf{y}_i = \mathbf{u}^{(i)}, \qquad \mathbf{f}_i = F\left(\mathbf{u}^{(i)}\right)$$

jelölésekkel látjuk el, illetve bevezetjük a

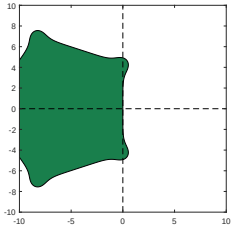
$$\bar{\mathbf{v}} = \mathbf{I} \otimes \mathbf{v}, \quad \bar{\alpha} = \mathbf{I} \otimes \alpha, \quad \bar{\beta} = \mathbf{I} \otimes \beta$$

jelöléseket és így a Runge-Kutta módszerek

$$\begin{cases} \mathbf{y} = \bar{\mathbf{v}}\mathbf{u}_n + \bar{\alpha}\mathbf{y} + \Delta t \bar{\beta}\mathbf{f}, \\ \mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{y}_{m+1} \end{cases}$$

kompakt alakba írhatóak.

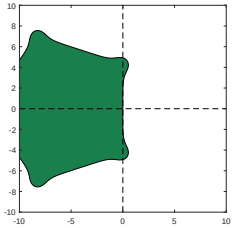
EÖTVÖS LORÁND
UNIVERSITY | BUDAPEST



Példa

$$\begin{cases} \mathbf{u}^{(1)} = \mathbf{u}_n, \\ \mathbf{u}^{(2)} = \mathbf{u}^{(1)} + \Delta t F\left(\mathbf{u}^{(1)}\right), \\ \mathbf{u}_{n+1} = \frac{3}{4}\mathbf{u}^{(1)} + \frac{1}{4}\Delta t F\left(\mathbf{u}^{(1)}\right) + \frac{1}{4}\mathbf{u}^{(2)} + \frac{1}{2}\Delta t F\left(\mathbf{u}^{(2)}\right) \end{cases}$$

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \alpha = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}, \quad \beta = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

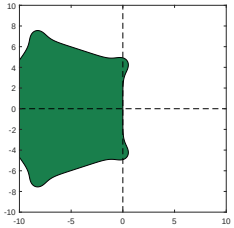


Kapcsolat

A Butcher- és a Shu-Osher-együtthatók közötti kapcsolatot a módszert definiáló első egyenlet **y**-ra történő megoldásával nyerjük:

$$\begin{aligned}
\mathbf{y} &= \bar{\mathbf{v}}\mathbf{u}_n + \bar{\alpha}\mathbf{y} + \Delta t\bar{\beta}\mathbf{f} \\
(\mathbf{I} - \bar{\alpha})\mathbf{y} &= \bar{\mathbf{v}}\mathbf{u}_n + \Delta t\bar{\beta}\mathbf{f} \\
\mathbf{y} &= (\mathbf{I} - \bar{\alpha})^{-1}\bar{\mathbf{v}}\mathbf{u}_n + \Delta t(\mathbf{I} - \bar{\alpha})^{-1}\bar{\beta}\mathbf{f} \\
\mathbf{y} &= \mathbf{e}\mathbf{u}_n + \Delta t(\mathbf{I} - \bar{\alpha})^{-1}\bar{\beta}\mathbf{f},
\end{aligned}$$

ha feltesszük, hogy $(\mathbf{I} - \bar{\alpha})$ invertálható.



Egyedi reprezentáció

Egyik módja az egyértelműsítésnek az $\alpha = 0$ mátrix választás. Ekkor a módszer konzisztenciájának megőrzéséhez $\mathbf{v} = \mathbf{e} = [1, 1, \ldots 1]^T$ választandó. Kérdés, hogy mik lesznek a megfelelő $\beta_{i,j}$ együtthatók. Ehhez legyen a rögzített α-val leírt módszerhez tartozó mátrix β_0, ekkor a módszer

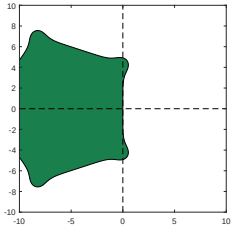
$$\begin{cases} \mathbf{y} = \mathbf{e}u_n + \Delta t \bar{\beta} \mathbf{f}, \\ u_{n+1} = \mathbf{y}_{m+1}. \end{cases}$$

Az előző összefüggésből kiolvasható, hogy ekkor

$$\bar{\beta}_0 = (\mathbf{I} - \bar{\alpha})^{-1} \bar{\beta}, \text{ és } \bar{\beta}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & 0 \\ \mathbf{b} & 0 \end{bmatrix}$$

esetén a fenti módszer Butcher-alakú:

$$\begin{cases} \mathbf{u}^{(i)} = u_n + \Delta t \sum_{j=1}^{m} a_{i,j} F\left(\mathbf{u}^{(j)}\right) \qquad i \in \{1, 2, \ldots, m\}, \\ u_{n+1} = u_n + \Delta t \sum_{j=1}^{m} b_j F\left(\mathbf{u}^{(j)}\right). \end{cases}$$



A kanonikus Shu-Osher-alak, I.

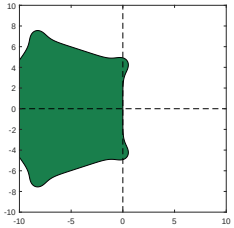
A Butcher-tableau egyedi (lépcsők permutációja és reducibilitás erejéig), viszont nem lehet könnyen meghatározni az SSP együtthatót. Az eddigi Shu-Osher alakokból könnyen ki lehetett olvasni az SSP együtthatót, viszont nem egyediek.

Ötlet: Legyen

$$\frac{\alpha_{i,j}}{\beta_{i,j}} = r.$$

Legyenek az ezekhez tartozó mátrixok α_r, β_r és $\alpha_r = r\beta_r$. Ha a módszer 0-jóldefiniált, akkor

$$\begin{aligned}(\mathbf{I} - r\beta_r)^{-1}\beta_r &= \beta_0 \\ \beta_r &= \beta_0 - r\beta_r\beta_0 \\ \beta_r(\mathbf{I} + r\beta_0) &= \beta_0\end{aligned}$$



A kanonikus Shu-Osher-alak, II.

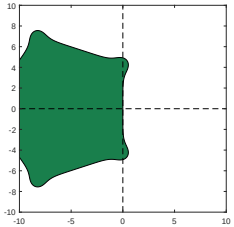
$$(\mathbf{I} - r\beta_r)^{-}1 = \beta_0$$
$$\beta_r = \beta_0 - r\beta_r\beta_0$$
$$\beta_r(\mathbf{I} + r\beta_0) = \beta_0.$$

Azaz a Shu-Osher együtthatók

$$\beta_r = \beta_0(\mathbf{I} + r\beta_0)^{-1}$$
$$\alpha_r = r\beta_r = r\beta_0(\mathbf{I} + r\beta_0)^{-1}$$
$$\mathbf{v}_r = (\mathbf{I} - \alpha_r)\mathbf{e} = (\mathbf{I} + r\beta_r)^{-1}\mathbf{e},$$

és így a *kanonikus Shu-Osher-alak:*

$$\mathbf{y} = \bar{\mathbf{v}}_r\mathbf{u}_n + \bar{\alpha}_r\left(\mathbf{y} + \frac{\Delta t}{r}\mathbf{f}\right).$$



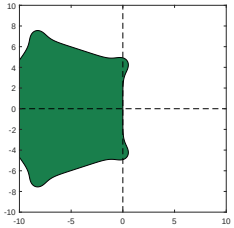
SSP együttható kiolvasása

Tétel. Legyen egy β_0 Butcher-tableauval adott Runge-Kutta módszer. Ekkor

$$\mathcal{C} = \max\left\{ r \geq 0 \;\middle|\; (\mathbf{I} + r\beta_0)^{-1} \text{ létezik, } \alpha_r \geq 0,\ \mathbf{v}_r \geq 0 \right\}.$$

Lemma. Ha a módszer 0-jóldefiniált, akkor a fenti mátrix invertálható $0 \leq r \leq \mathcal{C}(\alpha, \beta)$ esetén, és emellett $\alpha_r, \mathbf{v}_r$ nemnegatívok.

Azaz tetszőleges $0 \leq r \leq \mathcal{C}$-re lehet készíteni megfelelő SSP-együtthatós módszert, és így az SSP-együttható meghatározható.



További vizsgálati lehetőségek:

- Implicit módszerek
- Rendkorlátok
- SSP-együttható korlátja
- Downwind-sémák
- Többlépéses (vagy akár általános lineáris) módszerek
- Adaptív módszerek

[1] Gottlieb, S.; Ketcheson, D. and Shu, C. W.: *Strong stability preserving Runge-Kutta and multistep time discretizations.* (2011).